Eksperymenty z FPGA (12)

Dyskretna transformata Fouriera

Zanim połączymy bloki naszego układu FPGA w układ analizatora widma dźwięku, rozpoczniemy od teoretycznych podstaw dyskretnej transformaty Fouriera. Jest to konieczne dla dobrego zrozumienia tego trudnego zagadnienia.

Przed przystąpieniem do wykonywania eksperymentów, zachęcam do aktualizacji repozytorium z przykładami (poprzez wywołanie polecenia `git pull`) [1]. **Rysunek 1** pokazuje przykładowy sygnał analogowy. Został on spróbkowany w ośmiu, równo od siebie oddalonych punktach – są one zaznaczone na wykresie kropkami. Natomiast to, co zostaje z sygnału za przetwornikiem ADC, ilustruje **rysunek 2**. Na pierwszy rzut oka ciężko dopatrzeć się w pojedynczych punktach pierwotnego sygnału, ale jeżeli spełnione jest twierdzenie o próbkowaniu, to zawarta jest w nich pełna informacja o przebiegu ciągłym. Twierdzenie mówi o tym, że częstotliwość próbkowania musi być dwa razy większa niż szerokość pasma badanego sygnału.

Wrócimy jednak do naszych próbek, które możemy przedstawić jako wektor o długości N=8:

$$x=[1,-0.21,-1,-0.21,1,1.21,1,1.21]^T$$

W tym zapisie współczynniki odnoszą się do najprostszej bazy, składającej się z wektorów:

$$v=\left\{[1,0,0,0,0,0,0,0]^T,[0,1,0,0,0,0,0,0]^T,\ldots,[0,0,0,0,0,0,0,1]^T\right\}$$

Krócej możemy zapisać ją za pomocą delty Kronecker:

$$v_n^k=\delta(n-k) \qquad (1)$$

Gdzie $\boldsymbol{v^k}$ to kolejny wektor bazy, natomiast $\boldsymbol{n}$ jest indeksem elementu wewnątrz niego. Nie jest to jednak jedyna możliwa baza. Możemy na przykład zaproponować taką, która składa się z ciągów odpowiadających kolejnym (zespolonym) sygnałom sinusoidalnym:

$$v'^{k}_{n}=e^{-2\pi k\frac{n}{N}}=\cos\left(-2\pi k\frac{n}{N}\right)+j\sin\left(-2\pi k\frac{n}{N}\right) \qquad (2)$$

Kolejne wektory bazy pokazuje **rysunek 3**. Na wszystkich wykresach kolorem niebieskim oznaczono część rzeczywistą, a zielonym – urojoną.

Jeżeli więc zapiszemy nasz wektor w nowej bazie, kolejne współczynniki (teraz już zespolone) będą oznaczały amplitudę i fazę kolejnych składowych, występujących w sygnale. Zwracam uwagę, że częstotliwość $\boldsymbol{k}$ jest przy próbkowaniu równoważna częstotliwości $\boldsymbol{k-N}$:

$$e^{-2\pi(k-N)\frac{n}{N}}=e^{-2\pi k\frac{n}{N}+2\pi N\frac{n}{N}}=e^{-2\pi k\frac{n}{N}+2\pi n}=e^{-2\pi k\frac{n}{N}} \qquad (3)$$

Ostatnia równość jest prawdziwa, ponieważ $\boldsymbol{n}$ jest zawsze liczbą całkowitą, a dodanie $\boldsymbol{2\pi}$ do argumentu funkcji trygonometrycznej, nie powoduje zmiany wyniku. Dlatego częstotliwości 5, 6 i 7 możemy interpretować także jako –3, –2 i –1 – takie podejście pokazuje **rysunek 4**. Warto zwrócić uwagę, że częstotliwości ujemne różnią się od dodatnich jedynie znakiem części urojonej. Jest to możliwe, ponieważ tak naprawdę interesują nas jedynie wartości w punktach, a nie całe krzywe. Zostały one narysowane na wykresie, ponieważ bez oznaczeń ciężko dojść, skąd się wzięły oraz co reprezentują poszczególne punkty – o czym można przekonać się, spoglądając na **rysunek 5**.

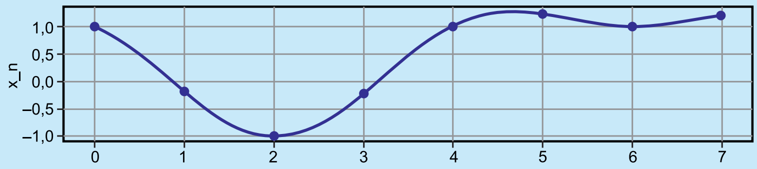
Aby przejść z jednej bazy do drugiej, potrzebujemy jeszcze macierzy przejścia. Składa się ona z kolejnych wektorów nowej bazy, wyrażonych we współczynnikach starej. W naszym przypadku jest ona dana wzorem:

$$s=\left[v'^{0},v'^{1},\ldots v'^{N-1}\right] \qquad (4)$$

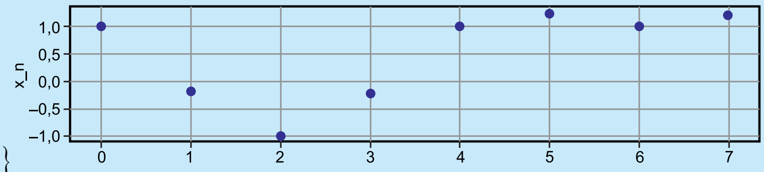
Oznacza to, że jej kolejne elementy to:

$$s_{n,k}=e^{-j2\pi\frac{kn}{N}} \qquad (5)$$

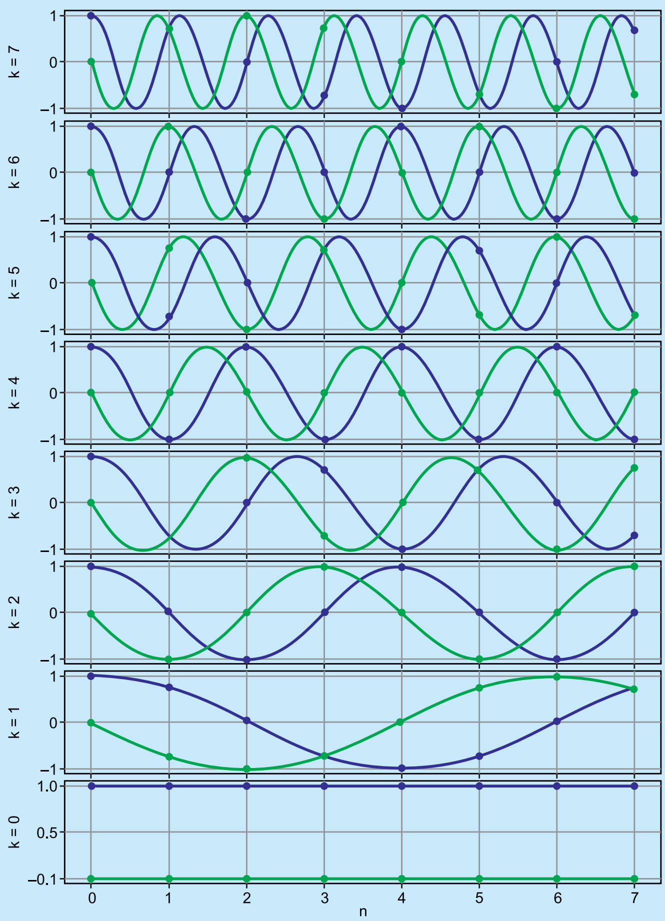
Aby uzyskać wartości współczynników naszego wektora $\boldsymbol{x}$, w nowej bazie musimy pomnożyć go przez macierz:



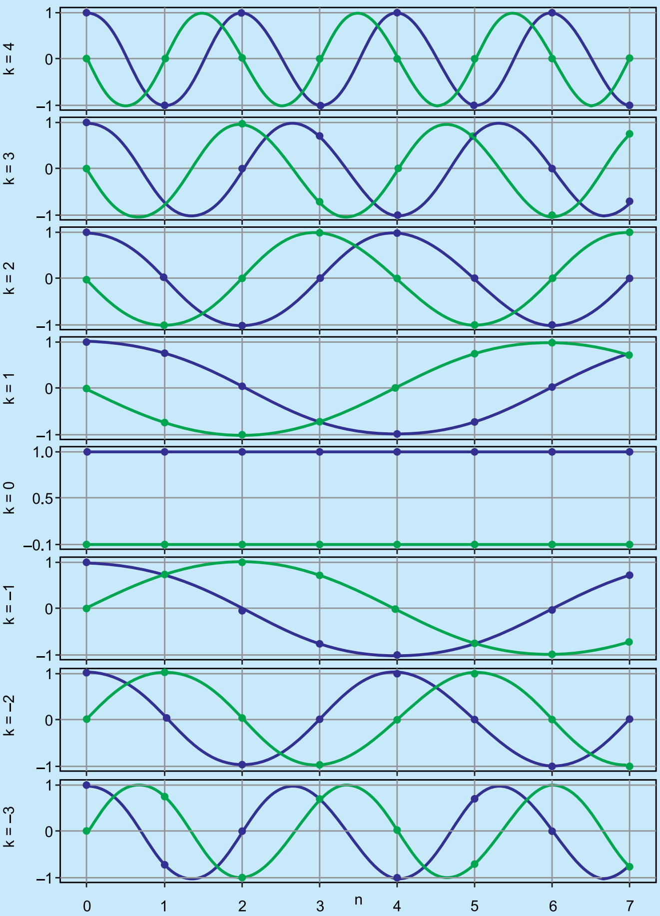
Rysunek 1. Ciągły sygnał wejściowy z zaznaczonymi miejscami próbkowania



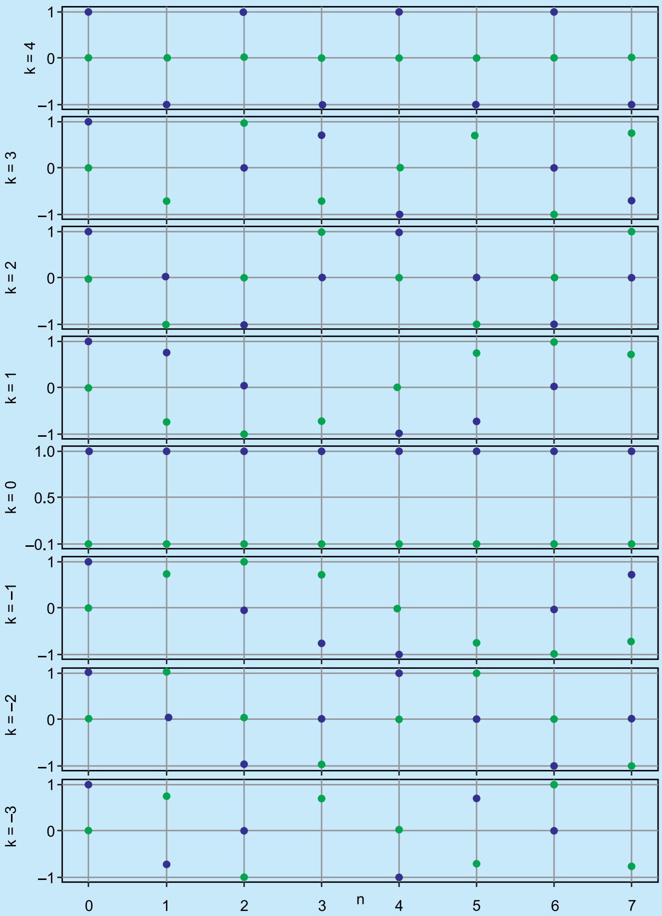
Rysunek 2. Spróbkowany sygnał z rysunku 1



Rysunek 3. Baza złożona z zespolonych funkcji sinusoidalnych



Rysunek 4. Baza z rysunku 3, ale przy interpretacji części częstotliwości jako ujemnych



Rysunek 5. Wektory bazy bez zaznaczonych pomocniczych przebiegów

$$X = sx \qquad (6)$$

Rozpisując, otrzymujemy:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} s_{n,k} x_n \qquad (7)$$

Po podstawieniu elementów macierzy z (5) otrzymujemy dobrze znany wzór na dyskretną transformatę Fouriera:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi\frac{kn}{N}} \qquad (8)$$

Gdzie zarówno ***n***, jak i ***k***, zmieniają się od ***0*** do ***N–1***. Dla uproszczenia zapisów czasami stosuje się też oznaczenie:

$$W_N^n = e^{-j2\pi\frac{n}{N}} \qquad (9)$$

Prowadzi to do krótszego zapisu:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{kn} \qquad (10)$$

Warto zauważyć, że dla sygnału rzeczywistego części urojone muszą się zredukować. Oznacza to, że współczynniki przy częstotliwościach dodatnich będą sprzężeniem odpowiadających im współczynników przy częstotliwościach ujemnych. Nie dotyczy to częstotliwości ***0*** oraz $\frac{N}{2}$, które nie mają odpowiadających im składowych ujemnych. Nie jest to jednak problemem, ponieważ oba przebiegi są rzeczywiste.

Pozostaje jeszcze wykonanie obliczeń dla danych z rysunku 1. Otrzymana transformata to:

$$X = \left[0.5, -0.5j, 0.25, 0, 0, 0, 0.25, 0.5j\right]^T$$

Kształt poszczególnych składowych pokazuje **rysunek 6**.

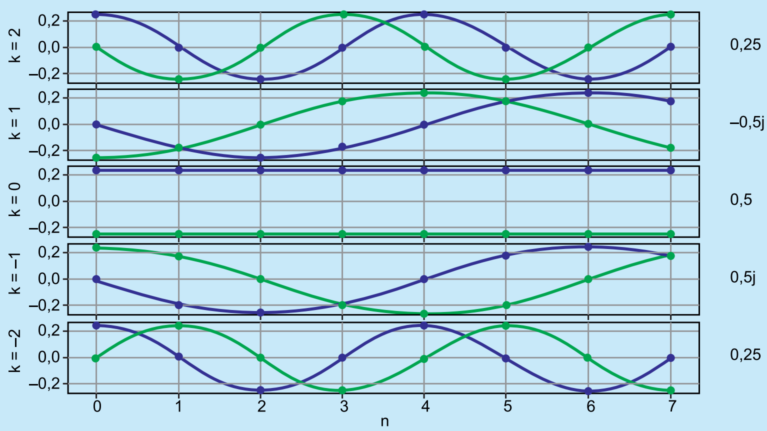
FFT, czyli sprytne obliczenia

Korzystając bezpośrednio z definicji, dojdziemy do tego, że aby obliczyć pojedynczy współczynnik, musimy wykonać ***N*** mnożeń zespolonych. Ponieważ samych współczynników też jest ***N***, łatwo obliczyć, że przy naiwnym podejściu niezbędnych jest ***N***² mnożeń zespolonych. Proponuję zamiast tego prosty trik, który przyspieszy obliczenia:

$$n = \frac{N}{2}n_1 + n_2 \;\; n_1 = 0,1 \;\; n_2 = 0,1\ldots,\frac{N}{2}-1$$
$$k = k_1 + 2k_2 \;\; k_1 = 0,1 \;\; k_2 = 0,1\ldots,\frac{N}{2}-1 \qquad (11)$$

Stosując inne podstawienie, można uzyskać inne wersje szybkiej transformaty Fouriera [2]. My jednak prześledzimy tylko podstawowy przypadek, w którym uzyskamy obliczenie transformaty o rozmiarze ***N*** za pomocą dwóch transformat o połowę krótszych. Podstawiając do (10), otrzymamy:

$$X_k = \sum_{n_2=0}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{n_1=0}^{1} x_{\frac{N}{2}n_1+n_2} e^{-j2\pi\frac{(k_1+2k_2)\left(\frac{N}{2}n_1+n_2\right)}{N}} \qquad (12)$$



Rysunek 6. Składowe sygnału z rysunku 1

Na początku zajmijmy się samą potęgą. Po wymnożeniu nawiasów otrzymamy:

$$e^{-j2\pi\frac{(k_1+2k_2)\left(\frac{N}{2}n_1+n_2\right)}{N}}=e^{-j2\pi\frac{\frac{N}{2}k_1n_1+k_1n_2+2\frac{k_2N}{2}n_1+2k_2n_2}{N}} \tag{13}$$

Sumę w wykładniku możemy rozpisać jako mnożenie:

$$e^{-j2\pi\frac{\frac{N}{2}k_1n_1}{N}}\ e^{-j2\pi\frac{k_1n_2}{N}}\ e^{-j2\pi\frac{\frac{2k_2N}{2}n_1}{N}}\ e^{-j2\pi\frac{2k_2n_2}{N}} \tag{14}$$

Spróbujmy uprościć poszczególne składniki:

$$e^{-j2\pi\frac{\frac{N}{2}k_1n_1}{N}}=e^{-j\pi k_1n_1}=\cos(-\pi k_1n_1)+j\sin(-\pi k_1n_1)=$$
$$=\cos(-\pi k_1n_1)=(-1)^{k_1n_1} \tag{15}$$

Dzieje się tak, ponieważ iloczyn k_1n_1 może przyjąć jedynie wartość ***0*** albo ***1***. Jeszcze bardziej możemy uprościć trzeci iloczyn:

$$e^{-j2\pi\frac{2\frac{k_2N}{2}n_1}{N}}=e^{-j2\pi k_2n_1}=e^{-j2\pi}=1 \tag{16}$$

Ponieważ zarówno k_2, jak i n_1 są liczbami całkowitymi, mamy zawsze do czynienia z obrotem o pełny kąt 2π. Dlatego cały czynnik upraszcza się i jest zawsze równy ***1***. Korzystając z tych zależności, możemy teraz rozpisać (4) jako:

$$X_k=\sum_{n_2=0}^{\frac{N}{2}-1}\left[\left(\sum_{n_1=0}^{1}(-1)^{k_1n_1}x_{\frac{N}{2}n_1+n_2}\right)e^{-j2\pi\frac{k_1n_2}{N}}\right]e^{-j2\pi\frac{k_2n_2}{\frac{N}{2}}} \tag{17}$$

Rozpiszmy jeszcze wewnętrzną sumę. Ma ona w końcu jedynie dwa składniki:

$$X_k=\sum_{n_2=0}^{\frac{N}{2}-1}\left[\left((-1)^{k_1 0}x_{\frac{N}{2}0+n_2}+(-1)^{k_1 1}x_{\frac{N}{2}1+n_2}\right)e^{-j2\pi\frac{k_1n_2}{N}}\right]e^{-j2\pi\frac{k_2n_2}{\frac{N}{2}}} \tag{18}$$

Po usunięciu mnożeń razy ***1*** otrzymamy:

$$X_k=\sum_{n_2=0}^{\frac{N}{2}-1}\left[\left(x_{n_2}+(-1)^{k_1}x_{\frac{N}{2}+n_2}\right)e^{-j2\pi\frac{k_1n_2}{N}}\right]e^{-j2\pi\frac{k_2n_2}{\frac{N}{2}}} \tag{19}$$

Gdy zasłonimy sobie nawias kwadratowy i przyjrzymy się pozostałej części wzoru, zauważymy coś ciekawego. Otóż cała reszta przypomina także transformatę Fouriera, ale tym razem o długości o połowę mniejszej. Rozpiszmy teraz jeszcze indeks k, osobno dla parzystych i nieparzystych współczynników, a otrzymamy:

$$X_{2k_2}=\sum_{n_2=0}^{\frac{N}{2}-1}\left[x_{n_2}+x_{\frac{N}{2}+n_2}\right]e^{-j2\pi\frac{k_2n_2}{\frac{N}{2}}}\ \text{dla } k_1=0$$

$$X_{2k_2+1}=\sum_{n_2=0}^{\frac{N}{2}}\left[\left(x_{n_2}-x_{\frac{N}{2}+n_2}\right)e^{-j2\pi\frac{n_2}{N}}\right]e^{-j2\pi\frac{k_2n_2}{\frac{N}{2}}}\ \text{dla } k_1=1 \tag{20}$$

Rozpisaliśmy transformatę Fouriera o długości ***N*** na dwie transformaty o mniejszej długości. Teraz musimy wykonać pewne działania na współczynnikach, a następnie policzyć jedną transformatę dla współczynników parzystych, a drugą dla nieparzystych. Jednak sądzę, że to dobry moment, aby zakończyć ten odcinek i dać czytelnikom czas na spokojne przeanalizowanie opisanych obliczeń.

Rafał Kozik
rafkozik@gmail.com

Przypisy:

[1] Repozytorium z przykładami: http://bit.ly/33uYPxs
[2] Lyons r.G., *Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów*, Wydawnictwo Komunikacji i Łączności, Warszawa 2010
[3] Film prezentujący działanie FFT: https://bit.ly/35H0yTp

Miesięcznik **„Elektronika Praktyczna”**
(12 numerów w roku) jest wydawany
przez AVT-Korporacja Sp. z o.o. we współpracy
z wieloma redakcjami zagranicznymi.

Wydawnictwo:
AVT-Korporacja Sp. z o.o.
03-197 Warszawa, ul. Leszczynowa 11
tel. 22 257 84 99, faks 22 257 84 00

Wydawca:
Wiesław Marciniak

Adres redakcji:
03-197 Warszawa, ul. Leszczynowa 11
tel. 22 257 84 60
faks 22 257 84 00
e-mail: redakcja@ep.com.pl
www.ep.com.pl

Redaktor Naczelny:
Damian Sosnowski

Redaktor Programowy,
Przewodniczący Rady Programowej:
Piotr Zbysiński

Menedżer Magazynu:
Katarzyna Gugała

Szef Pracowni Konstrukcyjnej:
Grzegorz Becker

Redakcja strony internetowej *www.ep.com.pl*
MAD Sp. z o.o.

Zespół marketingu i reklamy:
Katarzyna Gugała, tel. 22 257 84 64
Bożena Krzykawska, tel. 22 257 84 42
Grzegorz Krzykawski, tel. 22 257 84 60

Sekretarz Redakcji:
Grzegorz Krzykawski, tel. 22 257 84 60

DTP i okładka:
MAD Sp. z o.o.

Stali Współpracownicy:
Nikodem Czechowski, Jakub Tyburski, Lucjan Bryndza, Jarosław Doliński, Andrzej Gawryluk, Krzysztof Górski, Tomasz Jabłoński, Michał Kurzela, Szymon Panecki, Sławomir Skrzyński, Ryszard Szymaniak, Adam Tatuś, Robert Wołgajew

Uwaga!
Kontakt z wymienionymi osobami jest możliwy via e-mail, według schematu: imię.nazwisko@ep.com.pl

Prenumerata w Wydawnictwie AVT
www.avt.pl/prenumerata
lub tel. 22 257 84 22
e-mail: prenumerata@avt.pl
www.sklep.avt.pl, tel. 22 257 84 66

Prenumerata w RUCH S.A.
www.prenumerata.ruch.com.pl
lub tel. 801 800 803, 22 717 59 59
e-mail: prenumerata@ruch.com.pl

Wydawnictwo
AVT-Korporacja Sp. z o.o.
należy do **Izby Wydawców Prasy**