System nawigacji satelitarnej GPS, część 6

Pozycja, prędkość i czas

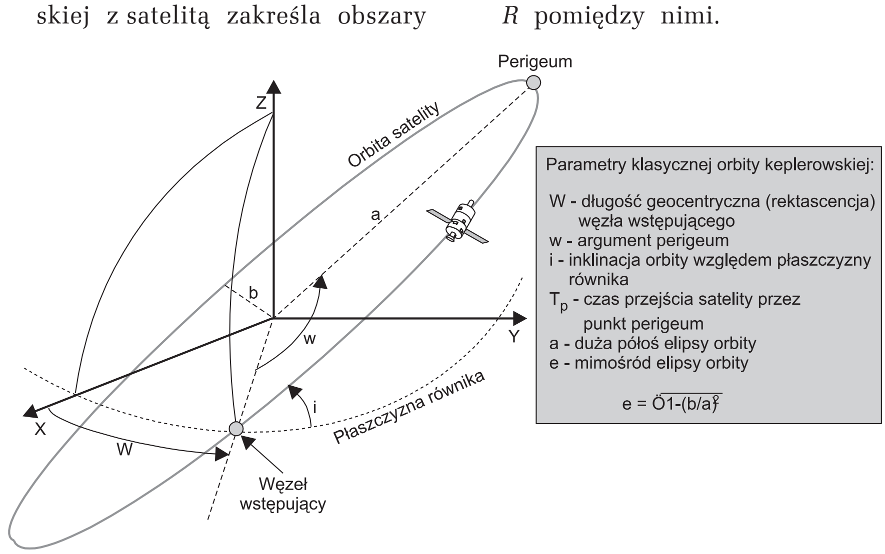
W poprzedniej części kursu opisalismy między innymi strukturę sygnałów nadawanych przez satelity systemu GPS. Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie sposobu wykorzystania tych sygnałów w odbiornikach GPS należących do segmentu użytkowników.

Położenie satelitów

Jak pamiętamy, położenie użytkownika w systemie GPS jest wyznaczane jako miejsce przecięcia powierzchni pozycyjnych o kształcie sfery. Pseudoodległości, których sposób określania w odbiornikach GPS został wyjaśniony powyżej, mogą być traktowane jako promienie tych sfer. Pozostaje jeszcze do wyjaśnienia sposób, w jaki odbiorniki GPS znajdują środki poszczególnych sfer, czyli położenia satelitów GPS w chwili nadawania z nich sygnałów śledzonych w odbiorniku.

Jak już wspomniano w pierwszym odcinku kursu, ruch satelitów GPS odbywa się po prawie kołowych orbitach o promieniu około 26560 km. Opisem ruchu satelitów zajmuje się mechanika orbitalna, której trzy fundamentalne zasady zostały sformułowane w XVII wieku przez Keplera. Zgodnie z tymi zasadami, ruch satelity GPS po orbicie nominalnej, zwanej orbitą keplerowską, spełnia następujące warunki:

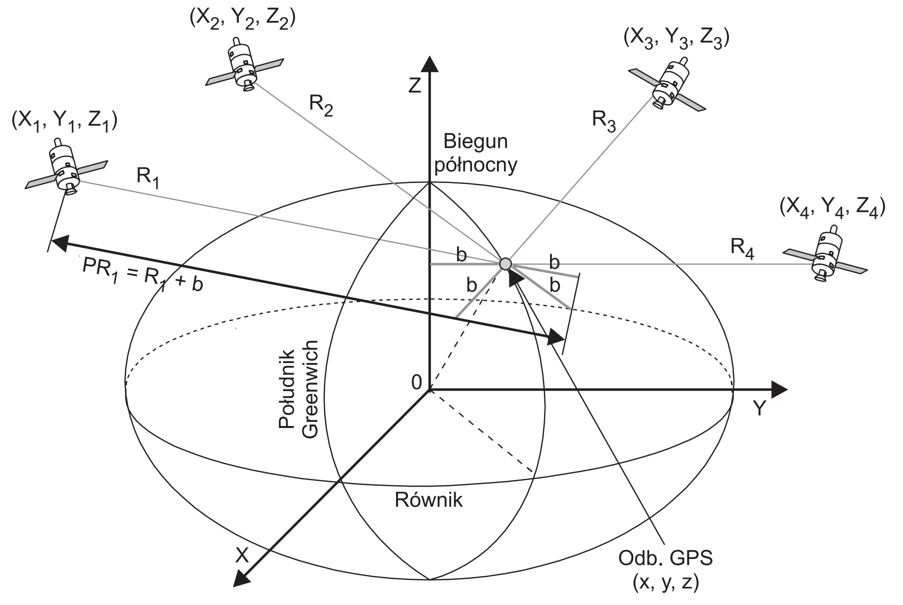
1. Orbita satelity jest eliptyczna, a Ziemia znajduje się w jednym z ognisk tej elipsy.
2. Linia łącząca środek kuli ziemskiej z satelitą zakreśla obszary o jednakowych powierzchniach w jednakowych odcinkach czasu.
3. Kwadrat okresu obiegu satelity wokół Ziemi jest proporcjonalny do trzeciej potęgi odległości *R* pomiędzy nimi.



Rys. 25. Orbita satelity i jej parametry

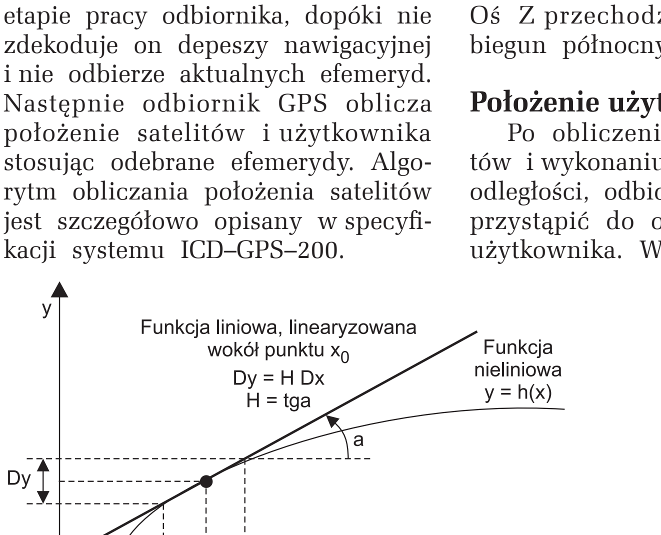
Orbita nominalna satelity może być opisana za pomocą 6 parametrów, określających kształt i orientację elipsy orbity w przestrzeni oraz fazę satelity w ruchu po tej orbicie. Dzięki takiemu opisowi w każdej chwili można obliczyć bieżące położenie i prędkość satelity. Parametry klasycznej orbity keplerowskiej przedstawiono na **rys. 25**.

W rzeczywistości ruch satelitów GPS wykazuje odstępstwa od ruchu po orbicie keplerowskiej. Odstępstwa te, zwane perturbacjami, są wywoływane przez niejednorodności pola grawitacyjnego Ziemi, oddziaływania grawitacyjne Księżyca i Słońca, oddziaływanie strumienia promieniowania słonecznego, itp. Z tego względu ruch satelitów jest na bieżąco monitorowany przez segment kontrolny GPS. Obliczone w głównej stacji kontrolnej zmodyfikowane parametry orbitalne wraz z poprawkami korekcyj-



Rys. 26. Zasada określania położenia użytkownika w systemie GPS

nymi są transmitowane do satelitów, a następnie przesyłane przez satelity w 2 i 3 podramce depeszy nawigacyjnej (efemerydy) oraz w 4 i 5 podramce depeszy (almanach). Liczba parametrów orbitalnych przesyłanych jako efemerydy wynosi 17, a więc jest znacznie większa niż 6 parametrów niezbędnych do opisu klasycznej orbity keplerowskiej. Efemerydy umożliwiają stosunkowo dokładne obliczenie położenia i prędkości tych satelitów, które je nadają. Dane almanachu są mniej dokładne, ale zachowują aktualność znacznie dłużej niż efemerydy i z tego względu są zwykle wykorzystywane w początkowym etapie pracy odbiornika, dopóki nie zdekoduje on depeszy nawigacyjnej i nie odbierze aktualnych efemeryd. Następnie odbiornik GPS oblicza położenie satelitów i użytkownika stosując odebrane efemerydy. Algorytm obliczania położenia satelitów jest szczegółowo opisany w specyfikacji systemu ICD–GPS–200.



Rys. 27. Linearyzacja funkcji nieliniowej

W systemie GPS położenie satelitów i położenie użytkownika są wyznaczane w prostokątnym układzie współrzędnych ECEF (*Earth–Centered Earth–Fixed*), o początku w środku kuli ziemskiej, nieruchomym względem Ziemi. Oznacza to, że układ ten wykonuje ruch obrotowy wraz z kulą ziemską. Stosowany w GPS układ współrzędnych ma oznaczenie WGS–84 i oprócz definicji osi układu zawiera także opis przybliżonego kształtu naszej planety (elipsoidy ziemskiej). Osie X i Y układu WGS–84 leżą w płaszczyźnie równika, przy czym oś X przecina południk Greenwich (0°), a oś Y przecina południk 90°. Oś Z przechodzi natomiast przez biegun północny.

Położenie użytkownika i czas

Po obliczeniu położenia satelitów i wykonaniu pomiarów pseudoodległości, odbiornik GPS może już przystąpić do obliczenia położenia użytkownika. Wyobraźmy sobie sytuację przedstawioną na **rys. 26**.

Załóżmy, że z punktu o nieznanych współrzędnych (*x*, *y*, *z*), w którym znajduje się użytkownik posiadający odbiornik GPS widoczne są cztery satelity. Nadają one sygnały, na podstawie których w odbiorniku można obliczyć czas ich nadania oraz współrzędne każdego z satelitów (*X*, *Y*, *Z*). Odbiornik określa czasy odbioru i nadania poszczególnych sygnałów oraz oblicza cztery pseudoodległości *PR*. Każda z obliczonych pseudoodległości składa się z rzeczywistej odległości *R* i błędu zegara odbiornika *b*, którego wartość we wszystkich pseudoodległościach jest taka sama. Korzystając z zasad geometrii możemy zapisać zależność pseudoodległości od współrzędnych satelity i odbiornika oraz błędu zegara odbiornika. Dla przykładu zapiszemy to równanie dla pierwszego pomiaru:

$$PR_1 = \sqrt{(X_1 - x)^2 + (Y_1 - y)^2 + (Z_1 - z)^2} + b$$

W tym równaniu występują wielkości znane (pseudoodległość i współrzędne położenia pierwszego z satelitów) oraz cztery niewiadome *x*, *y*, *z* i *b*. Gdybyśmy dysponowali pomiarem tylko jednej pseudoodległości nie dałoby się określić na jej podstawie tych czterech niewiadomych. Założyliśmy jednak, że odbiornik śledzi cztery satelity, więc dysponujemy czterema pomiarami pseudoodległości i możemy ułożyć cztery równania podobne do powyższego. Układ czterech równań z czterema niewiadomymi można rozwiązać wyznaczając z niego trzy współrzędne położenia i błąd zegara. To właśnie rozwiązanie jest obliczane w odbiorniku GPS.

W większości współczesnych odbiorników GPS jako algorytm służący do wyznaczenia wyżej wymienionych wielkości stosuje się filtr Kalmana. Prostsze oraz starsze odbiorniki GPS nie stosują filtracji Kalmana, lecz każdorazowo po dokonaniu nowych pomiarów rozwiązują nieliniowy układ równań pseudoodległości wyznaczając pojedyncze punkty położenia użytkownika metodą iteracyjną. W celu wyjaśnienia zasady obliczania położenia, obecnie zostanie przedstawiona ta właśnie najprostsza metoda.

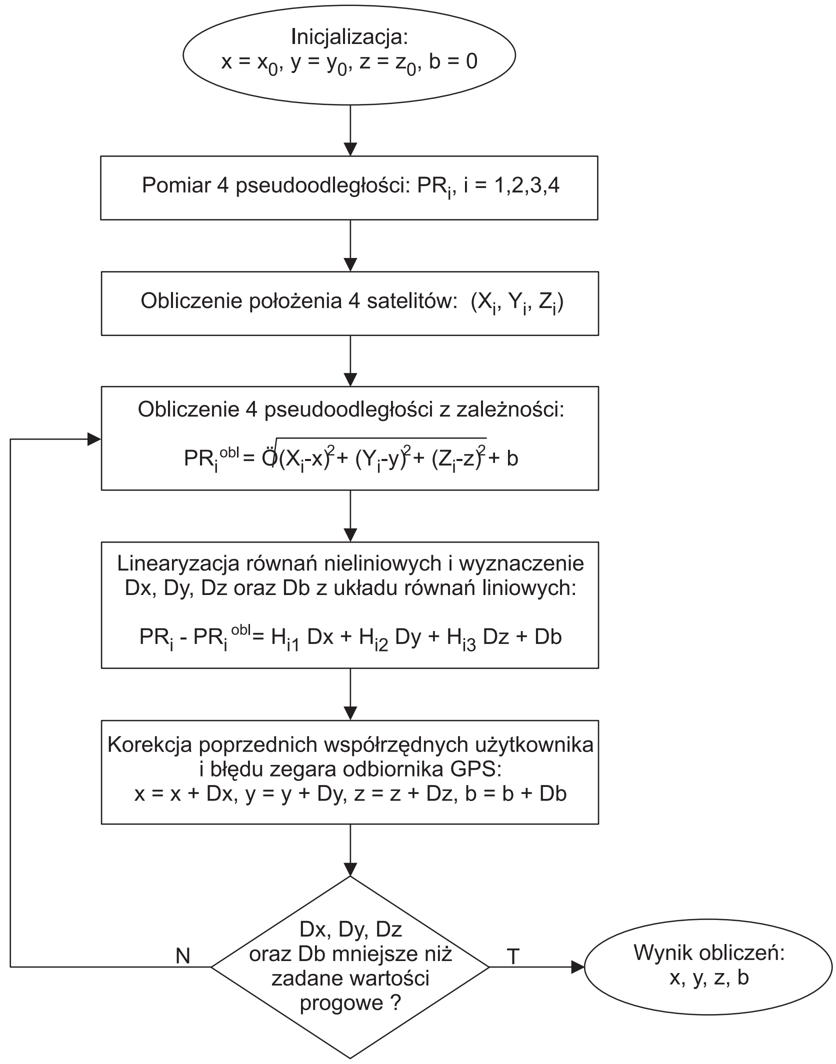
Rozwiązanie układu równań nieliniowych jest realizowane poprzez ich linearyzację, której istotę dla pewnej przykładowej funkcji jednej zmiennej *h*(*x*) wyjaśniono na **rys. 27**.

Linearyzacja funkcji nieliniowej *h*(*x*) polega na zastąpieniu jej funkcją liniową, która lokalnie, w niewielkim zakresie Δx wokół punktu x_0, w przybliżeniu pokrywa się z funkcją nieliniową. Wówczas zamiast nieliniowej zależności $y = h(x)$ możemy posługiwać się prostszą zależnością liniową $\Delta y \approx H \cdot \Delta x$, która jednak obowiązuje tylko dla małych odcinków Δx i Δy, a nie dla zmiennych x i y. Współczynnik H jest wyznaczany jako pochodna funkcji $h(x)$ w punkcie x_0 i jest równy tangensowi kąta nachylenia stycznej w tym punkcie.

Stosując linearyzację nieliniowej funkcji opisującej pseudoodległość, która jest funkcją 4 zmiennych (x, y, z, b), jako punkt, wokół którego dokonuje się tej linearyzacji wybieramy przybliżone położenie użytkownika (x_0, y_0, z_0). Może to być np. położenie zapamiętane podczas ostatniego użycia odbiornika GPS. Początkową wartość błędu zegara można przyjąć równą zeru $b_0 = 0$. Linearyzowane równanie dla pierwszej pseudoodległości przedstawia się następująco:

$$\Delta PR = PR_1 - PR_1^{obl} = H_{11} \cdot \Delta x + H_{12} \cdot \Delta y + \\ + H_{13} \cdot \Delta z + \Delta b$$

przy czym H_{11}, H_{12}, H_{13} są współczynnikami znalezionej funkcji liniowej, w przybliżeniu pokrywającej się z funkcją nieliniową w otoczeniu punktu (x_0, y_0, z_0). Wielkości Δx, Δy i Δz stanowią różnice pomiędzy rzeczywistymi współrzędnymi położenia użytkownika (x, y, z), a współrzędnymi założonymi (x_0, y_0, z_0), Δb jest różnicą pomiędzy rzeczywistym błędem zegara odbiornika b, a jego założoną wartością b_0, natomiast PR_1^{obl} jest wartością pseudoodległości obliczoną przy założeniu, że użytkownik znajduje się w punkcie (x_0, y_0, z_0). Algorytm obliczania położenia użytkownika w odbiorniku GPS przedstawiono na **rys. 28**.



Rys. 28. Prosty algorytm wyznaczania położenia w odbiorniku GPS

Jak widać błąd zegara odbiornika GPS jest tu traktowany tak, jakby stanowił kolejną współrzędną, którą należy wyznaczyć. I rzeczywiście, skoro znamy błąd zegara odbiornika, możemy odjąć ten błąd od jego wskazań, uzyskując bardzo precyzyjne wskazanie aktualnego czasu. Można więc powiedzieć, że w wyniku rozwiązania układu równań zostaje wyznaczone położenie użytkownika w czasoprzestrzeni czterowymiarowej, a nie w przestrzeni trójwymiarowej. Możliwość dokładnego określenia czasu jest bardzo ważną cechą systemu GPS, i znajduje ona szereg zastosowań, np. do synchronizacji rozproszonych systemów telekomunikacyjnych i energetycznych. Trzeba jednak zauważyć, że do wyznaczenia położenia i czasu konieczne jest śledzenie przez odbiornik przynajmniej czterech satelitów GPS. Gdyby wskazania zegara odbiornika były zgodne ze skalą czasu GPS, błąd zegara byłby zerowy ($b=0$) i wystarczyłyby pomiary tylko trzech pseudoodległości, które wówczas byłyby rzeczywistymi odległościami satelita–odbiornik.

Zwykle liczba widocznych satelitów jest większa niż 4. Wówczas odbiornik, w zależności od konstrukcji i wewnętrznego oprogramowania, może przetwarzać pomiary uzyskane ze wszystkich śledzonych satelitów lub pomiary z wybranych 4 satelitów, których rozmieszczenie jest optymalne z punktu widzenia minimalizacji błędów. Do oceny wpływu rozmieszczenia satelitów na dokładność położenia i czasu stosowane są współczynniki „rozmycia" dokładności DOP (*Dilution of Precision*), które zostaną omówione w jednym z kolejnych odcinków kursu. Optymalny wybór satelitów powinien minimalizować wartości tych współczynników.

Liczba iteracji wymaganych, aby algorytm przedstawiony na rys. 28 ustalił położenie z zadaną dokładnością zależy od dokładności inicjalizacji, założonych wartości progowych oraz od geometrii układu satelitów, których pomiary są wykorzystywane w rozwiązaniu nawigacyjnym. W typowych warunkach obserwacji, jeśli początkowe położenie jest znane z dokładnością do kilku kilometrów, już w pierwszym obiegu pętli uzyskuje się zadowalającą dokładność rzędu pojedynczych metrów.

Piotr Kaniewski
pkaniewski@wat.edu.pl