

Dyskretne przekształcenie Fouriera, część 4

W dziedzinie sygnałów dyskretnych przyjęto, że transformata Fouriera określająca widmo sygnału liczona będzie dla tylu częstotliwości, ile próbek w dziedzinie czasu posiada sygnał. Wynika stąd bardzo istotna zależność, określająca tzw. *częstotliwości analizy* – czyli częstotliwości, dla których liczone będą transformaty – mająca postać

$$f_{analizy} = m \cdot \Delta f = m \cdot \frac{f_s}{N} \quad (4.1)$$

przy czym m jest numerem kolejnego prążka w dziedzinie częstotliwości, czyli indeksem próbki wyjściowej transformaty, natomiast N oznacza całkowitą liczbę próbek ciągu wejściowego oraz – jak stwierdzono wyżej – wyjściowego. Indeksy m i n zmieniają się od zera do N .

Podstawiając kolejne częstotliwości analizy do wzoru (2.25), dyskretyzujemy transformatę, otrzymując

$$\begin{aligned} X\left(m \frac{f_s}{N}\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) e^{-j2\pi m \frac{f_s}{N} nT_s} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) e^{-j2\pi \frac{mn}{N}} \end{aligned} \quad (4.2)$$

W klasycznej notacji z reguły pomija się – jako oczywisty – odstęp w częstotliwości f_s/N i odstęp w czasie T_s , stosując zapis skrócony

$$X(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi \frac{mn}{N}} \quad (4.3)$$

Z uwagi na fakt, że liczba elementów obu ciągów jest z góry znana, sumowanie można sprowadzić do konkretnych granic, otrzymując w efekcie

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{mn}{N}} \quad (4.4)$$

Otrzymana zależność definiuje dyskretną transformatę Fouriera ciągu $x(n)$. Zauważmy, że wzór (4.4) abstrahuje od liczbowych wartości okresu próbkowania i odstepu między kolejnymi prążkami widma, operując tylko na ciągach liczbowych. Dla algorytmu implementującego *DFT* nie ma przy tym znacze-

W poprzedniej części cyklu zapoznaliśmy się z przekształceniem Fouriera sygnału ciągłego i dyskretnego. Stąd już tylko krok dzieli nas od zrozumienia dyskretnego i szybkiego transformaty Fouriera. W niniejszej części cyklu przejdziemy przez ostatni etap rozważań matematycznych i zakończymy naszą wędrówkę z dziedziny czasu do dziedziny częstotliwości weryfikując zdobytą wiedzę z zastosowaniem pakietu do komputerowej analizy układów elektronicznych ICAP/4 Windows.

nia, co reprezentuje sobą ciąg $x(n)$. W świetle tego jaśniejsze staje się pojęcie widma np. fotografii, które należy rozumieć jako dwuwymiarową *DFT* wektora zawierającego bitową reprezentację tej fotografii.

Podobnie jak poprzednio, korzystając ze wzoru Eulera, możemy przedstawić *DFT* w postaci

$$\begin{aligned} X(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left[\cos\left(2\pi \frac{mn}{N}\right) - j \sin\left(2\pi \frac{mn}{N}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Jak widać, kolejne częstotliwości analizy odpowiadają korelacji sygnału analizowanego z funkcjami harmonicznymi sinus i kosinus, mającymi kolejne m pełnych okresów w rozważanym przedziale próbkowania.

Wyprowadzimy teraz pewną istotną własność *DFT*, mówiącą, że dyskretna transformata Fouriera sygnału rzeczywistego jest symetryczna w sensie sprzężonym

$$X(m) = X^*(N - m) \quad (4.6)$$

Znaczenie tej własności jest niebagatelne, gdyż pokazuje, że tylko pierwszych $N/2$ wyrazów ciągu częstotliwości jest niezależna. Wystarczy więc policzyć składowe do tzw. częstotliwości *Nyquista*

$$f_N = \frac{f_s}{2} \quad (4.7)$$

a pozostałe przepisać jako liczby sprzężone.

Twierdzenie o symetrii łatwo udowodnić na podstawie definicji. Policzymy dyskretną transformatę Fouriera ciągu

$$\begin{aligned} X(N - m) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{(N-m)n}{N}} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi n} e^{j2\pi \frac{mn}{N}} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ponieważ

$$e^{-j2\pi n} = 1 \quad (4.9)$$

dla wszystkich całkowitych n , otrzymujemy

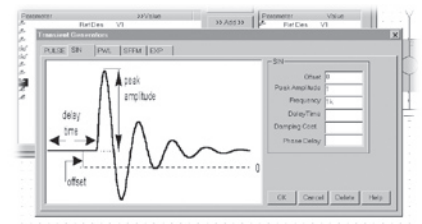
$$X(N - m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{j2\pi \frac{nm}{N}} = X^*(m) \quad (4.10)$$

a więc

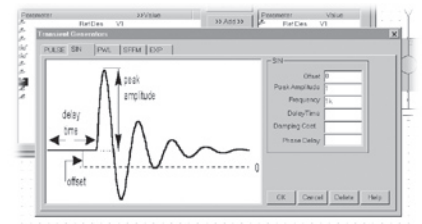
$$X(m) = X^*(N - m) \quad (4.11)$$

co należało udowodnić.

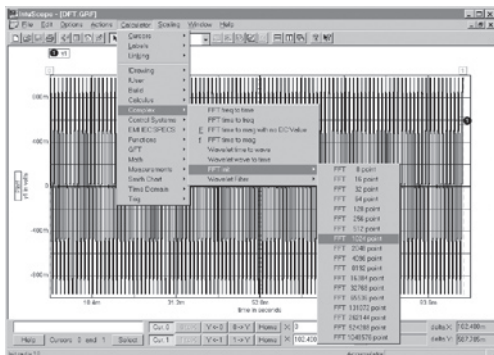
Ponadto z definicji łatwo wyprowadzić własność liniowości *DFT*, mówiącą, że jeśli dwa ciągi o jednakowej długości N zostaną zsumowane zgodnie z zależnością



Rys. 16. Deklaracja sygnału harmonicznego o częstotliwości 1 kHz



Rys. 17. Deklaracja parametrów analizy czasowej



Rys. 18. Wybór długości ciągu do analizy FFT

$$x_{sum}(n) = a x_1(n) + b x_2(n) \quad (4.12)$$

to transformata sumy tych sygnałów będzie odpowiednią sumą transformat sygnałów składowych

$$X_{sum}(m) = a X_1(m) + b X_2(m) \quad (4.13)$$

Amplituda DFT

Komentarza wymagają wartości amplitud poszczególnych składowych *DFT*. W szczególnych przypadkach, gdy transformacji poddajemy sygnał rzeczywisty zawierający składową harmoniczną o amplitudzie A_0 i takiej częstotliwości f_0 , że w przedziale N próbek wejściowych zawiera się całkowita liczba okresów tego sygnału, to amplituda prążka odpowiadającego częstotliwości f_0 jest równa

$$A_m = A_0 \cdot \frac{N}{2} \quad (4.14)$$

Dowolny sygnał wejściowy, którego częstotliwość nie jest dokładnie równa jednej z częstotliwości, dla których jest liczona transformata (tzn., gdy $f_0 \neq k f_{analizy}$, gdzie k jest liczbą naturalną), „przecieka” do wszystkich innych prążków *DFT*, fałszując widmo sygnału. Można stwierdzić, że zawsze

zostaje „kawałek” okresu, który nie zeruje się w korelacji z pełnymi okresami kolejnych częstotliwości analizy.

Dla rzeczywistego przebiegu harmonicznego, zawierającego k okresów w N -punktowym ciągu wejściowym, wartości prążków N -punktowej *DFT* w funkcji indeksu m są aproksymowane za pomocą funkcji *sinc*, tzn.

$$X(m) = \frac{N}{2} \cdot \frac{\sin[\pi(k-m)]}{\pi(k-m)} \quad (4.15)$$

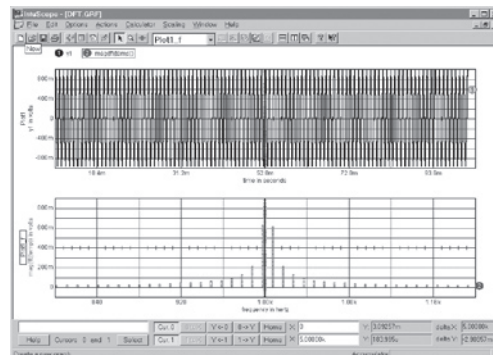
Funkcja *sinc* nie jest tu przybliżeniem, gdyż taką właśnie funkcją wyraża się ciągła transformata Fouriera funkcji prostokątnej.

Szybka transformata Fouriera

Dotychczas niemalże zamiennie stosowałem określenia *DFT* i *FFT*. W tym miejscu chciałbym wyraźnie podkreślić, że algorytm *FFT* wylicza dokładnie *DFT*, nie korzysta jednak z definicji, lecz stosuje opublikowane przez J. Cooleya i J. Tuckeya w roku 1965 wydajne rozwiązanie, oparte na symetrii funkcji harmonicznego. Jedynym ograniczeniem *FFT* jest wymaganie, aby ciąg wejściowy zawierał liczbę wyrazów równą całkowitej potęgze liczby 2. Nie stanowi to jednak istotnego problemu, bowiem w ostateczności można odpowiednio uzupełnić ciąg wejściowy zerami.

W celu zilustrowania zastosowania procedury *FFT* i samodzielnego przetestowania jej właściwości wykorzystamy postprocesor graficzny IntuScope, wchodzący w skład pakietu ICAP/4 Windows firmy IntuSoft. Na początek generujemy idealny sygnał harmoniczny o długości 1024 próbek. Najprościej można to zrobić, deklarując stosowne źródło i wykorzystując program IsSpice 4. Odpowiednią deklarację pokazano na rys. 16.

Na rys. 17 przedstawiono ustawienia parametrów analizy czasowej gwarantujące dobre odwzorowanie badanego sygnału harmonicznego (dziesięć próbek na jeden okres przebiegu) oraz zapewniającą wymaganą liczbę próbek (tu 1024 próbki).



Rys. 20. Reprezentacja „słupkowa” widma

Po wykonaniu symulacji wczytujemy wyniki analizy czasowej do postprocesora graficznego i wybieramy podstawę algorytmu *FFT*, tak jak pokazano na rys. 18.

Następnie z menu *Complex* wybieramy opcję *FFT time to mag* i uzyskujemy widmo pokazane na rys. 19.

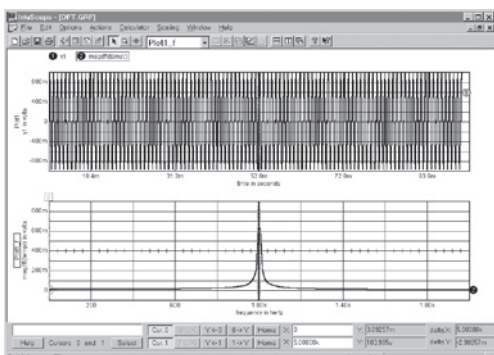
Po zmianie typu wykresu na słupkowy (rys. 20) uzyskujemy ostateczne widmo badanego sygnału.

Ponieważ widzimy wyraźny przeciek sygnału do sąsiednich prążków, to w celu poprawy odwzorowania sygnału w dziedzinie częstotliwości stosujemy okienkowanie.

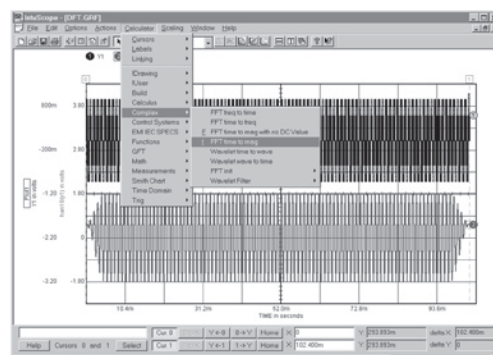
Po wywołaniu szybkiej transformaty Fouriera otrzymujemy widmo przedstawione na rys. 21.

Jak widać z porównania rysunków, przeciek został zmniejszony, co potwierdza sensowność okienkowania sygnału. Czytelnikowi pozostawiam analizę z zastosowaniem różnej ilości próbek i różnych wielkości okien. Jedynie samodzielne eksperymenty pozwolą nabrać doświadczenia w wyznaczaniu widm sygnałów za pomocą dostępnych przyrządów i narzędzi programistycznych.

Andrzej Dobrowolski
<http://adobrowolski.wel.wat.edu.pl>



Rys. 19. Wstępnie wyskalowany wynik działania algorytmu *FFT*



Rys. 21. Sygnał po operacji okienkowania